DARIO BEDNARSKI

MATHE FÜR ANTIMATHEMATIKER

Oberstufe 10. – 13. Klasse

ANALYSIS

riva

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie. Detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Für Fragen und Anregungen
info@rivaverlag.de

Originalausgabe
1. Auflage 2019

Nymphenburger Straße 86
D-80636 München
Tel.: 089 651285-0
Fax: 089 652096

Umschlagabbildungen: istock.com/Gile68, shutterstock.com/frankie's, bigstockphoto.com/Ivelin Radkov
Druck: Florjancic Tisk d.o.o., Slowenien
Printed in the EU

ISBN Print 978-3-7423-1282-2

Danksagung

Diese Zeilen will ich dafür nutzen Freunden zu danken, die mir halfen dieses Buch auf die Beine zu stellen. Es halfen Tamara Choteschovsky, Salome Lakowitz, Christian Thim, Julia Thim und John Weinert beim Korrekturlesen, Mario Bially bei der Sicherstellung der korrekten Lösungen. Vielen Dank dafür!

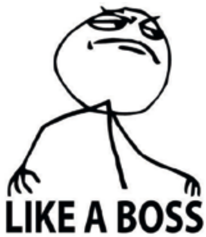
Einige hilfreiche Marketingtipps wurden mir von John Weinert und Benedikt Streb genannt. Danke für diese Unterstützung!

Und noch ein drittes Mal will ich John Weinert für die Hilfe bei der Erstellung der Homepage www.mathe-fuer-antimathematiker.de danken!

Ansonsten will ich allen Käufern dieses Buches für Vertrauen danken – ich hoffe, dass dieses Buch euren Mathehass ein wenig lindern wird. :)

Vorwort

...blabla..............................bla.........bla.......................bla................bla........
..bla............bla.............blabla............................blablablabla...........blabla..
.....bla..........[diesen].............blabla...........bla...........blabla....blabla..........
……......blabla.........................bla..bla....................bla...bla.........................
….[Scheiß].................bla.........blabla.......bla...........blabla...................bla..
bla.....bla........blablablabla..................................blabla...............................
......bla......blabla.......bla..............blablabla....................blabla...bla............
...blabla......blabla..............................[liest].............blabla......bla......blabla.
...........blabla....................................blabla..............blablabla......................
..blabla.........blablabla..[sich].......blabla.........blabla...............bla.........bla.
...........bla...................................blablabla.......bla.........blablablabla.........
..blabla...................[eh]blablablabla..........bla.....................blabla...bla.......
..............blabla....................................blablabl.[keiner]blabla.......bla.........
................bla...........blabla.............blablabla...........bla
.................blablabla...[durch]blablabla...........bla........
blablablabla......blablabla.............bla..............bla.........



Zwei wichtige Anmerkungen

So ist das Buch aufgebaut:

Dieses Buch habe ich in drei große Kapitel aufgeteilt:

1. Rechnen,
2. Visuelles vorstellen,
3. Mathe.

Zuerst werde ich dir beibringen, Gleichungen jeder Art lösen zu können. Das ist absolute Grundlage für Mathe. Dann werde ich dir erklären, wie man sich Funktionen anhand ihres Funktionsterms auf den ersten Blick optisch grob vorstellen kann und dann kommen wir zum Eigentlichen – Mathe.

Fang gar nicht erst an die ersten beiden Kapitel zu überspringen, weil du meinst, dass du sie nicht bräuchtest und nur Mathe wichtig ist. Es ist als würdest du ein Haus ohne Fundament auf weichen Boden bauen wollen – es wird immer wieder einstürzen und nie fertig gebaut werden können. Ich kann dir nur empfehlen die ersten beiden Kapitel sorgfältig durchzulesen und immer wieder Aufgaben zum üben zu machen. Erst dann wirst du nämlich merken, dass Mathe plötzlich soo einfach ist und man tatsächlich nicht viel wissen muss!

Ganz wichtig!

Du musst dich entscheiden, dass du Mathematik verstehen willst. Wenn du das Buch ohne diese Entscheidung liest, dann wird es dir nicht viel bringen. Also, auch wenn es dir vielleicht schwer fällt das zu glauben, aber du willst jetzt Mathe verstehen! – krass, oder!? :)

Naja, genug gelabert, jetzt fangen wir mal an…

Rechnen

Rechnen mit „normalen“ Gleichungen

Eine „Gleichung“ solltest du schon mal gesehen haben und am besten auch schon ein bisschen verstanden haben. Bei einer Gleichung gibt es immer eine linke und eine rechte Seite. Diese beiden Seiten müssen immer – also bei jeder Umformung – gleich sein. Dass die Seiten von Schritt zu Schritt immer gleich sind, nennt man auch **äquivalent**.
Die einfachsten Gleichungen, die es so gibt, sind die

Linearen Gleichungen

Das sind die, bei denen einfach nur x drin vorkommt (und nicht x^2 oder so). Zum *Beispiel*

- $2x=10$
- $3=\frac{1}{4}x+7$
- $5x+\frac{1}{7}=2x-\frac{2}{3}$

Eine Gleichung nach x aufzulösen ist doch ganz einfach:

1. Alles mit x auf eine und den Rest auf die andere Seite
2. Durch die Zahl, die mit „mal“ (also Multiplikation) mit dem x verbunden ist, teilen

Wenn du das bisschen üben magst, dann gibt es dafür im Aufgabenbuch auf Seite 10 ein paar Aufgaben – natürlich mit Lösungen.

*** *** ***

So, das war jetzt hoffentlich schon bekannt und sehr einfach für dich ;)
Die nächst schwereren Gleichungen sind die

Quadratischen Gleichungen

Das sind die, bei denen die größte „Hochzahl“ bei einem x eine 2 ist. Man sagt auch „Gleichungen **zweiten Grades**“. Die sehen dann ungefähr so aus:

- $16=4x^2$
- $2x+7=-\frac{1}{3}x^2+2$
- $0=2x^2-9x+1$

Die kann man jetzt nicht mehr so einfach nach x auflösen, wie die linearen Gleichungen, weil man x und x^2 nicht zusammenfassen kann. Und weil man diese eben nicht ganz einfach lösen kann, könnte es für solche Gleichungen ja eine Formel geben...

Mitternachtsformel (auch ABC – Formel genannt).

In manchen Schulen (wie auch in meiner), wird die **PQ-Formel** gelehrt. Die erkläre ich dann hinterher.

Ich glaub', am besten verstehst du die Mitternachtsformel an einem

Beispiel

$$0{,}5x^2+0{,}5=x^2-x-1 \qquad |-0{,}5x^2 \quad |-0{,}5$$

Als erstes muss alles auf eine Seite gebracht werden, sodass da $0=\ldots$ steht.

$$0=0{,}5x^2-x-1{,}5$$

$$a=0{,}5 \qquad b=-1 \qquad c=-1{,}5$$

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad |\text{ einsetzen}$$

$$x_{1/2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 0{,}5\cdot(-1{,}5)}}{2\cdot 0{,}5}$$

$$x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{1}$$

$$x_{1/2}=1\pm 2$$

$$x_1=1+2 \qquad x_2=1-2$$

$$x_1=3 \qquad x_2=-1$$

Um die Mitternachtsformel anwenden zu können, muss man genau eine Sache beachten:

- Es muss alles auf einer Seite stehen, sodass da $0=ax^2+bx+c$ steht.

Aufgaben gibt es dann auf Seite 11 im Aufgabenbuch.

Zusammenfassung (Mitternachtsformel)

1. Schmeiß alles auf eine Seite, sodass $0=ax^2+bx+c$
2. Bestimme a, b und c
3. In die Formel einsetzen und ausrechnen

Die PQ – Formel

Um quadratische Gleichungen zu lösen, gibt es neben der allgemeineren Mitternachtsformel auch die PQ- Formel. Am besten wirst du sie wohl an einem *Beispiel* verstehen.

$0{,}5x^2+0{,}5=x^2-x-1 \qquad |-0{,}5x^2 \quad |-0{,}5$

Als erstes muss alles auf eine Seite gebracht werden, sodass da $0=\ldots$ steht.

$0=0{,}5x^2-x-1{,}5$ | $0{,}5$ ausklammern, damit x^2 alleine steht

Das ist ganz wichtig, dass x^2 alleine steht!

$0=0{,}5\cdot(x^2-2x-3)$ | x^2 steht alleine → p und q ablesen

$p=-2 \qquad q=-3$

Die allgemeine Vorschrift lautet: $0=x^2+px+q$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x_{1/2}=-\frac{(-2)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{(-2)}{2}\right)^2-(-3)}$$

$$x_{1/2}=1\pm\sqrt{1+3}$$

$$x_{1/2}=1\pm\sqrt{4}$$

$x_1=1+2 \qquad x_2=1-2$

$x_1=3 \qquad x_2=-1$

Ja, so wendet man die PQ- Formel an – ist doch eigentlich ganz einfach, oder?!

Zusammenfassung (PQ-Formel)

1. Alles auf eine Seite schmeißen, sodass $0=...$
2. Die Zahl vor dem x^2 ausklammern, sodass x^2 alleine steht
3. Dann p und q bestimmen
4. In die Formel einsetzen und ausrechnen

Tipps zum Lösen einer quadratischen Gleichung

Du könntest mit der Mitternachts- bzw. PQ – Formel jede quadratische Gleichung lösen. Allerdings kannst du dir bestimmt vorstellen, dass es auch quadratische Gleichungen gibt, die man auch ohne Formel lösen kann.

> Für die Lösung einer quadratischen Gleichung braucht man <u>nicht</u> immer eine Formel.

Ehrlich gesagt musst du die Mitternachts- bzw. PQ – Formel nur dann anwenden, wenn in der Gleichung neben dem x^2 auch ein x und eine Zahl ohne x vorhanden sind. Also nur dann, wenn du eine Gleichung hast, die nach diesem Schema aufgebaut ist: $0=ax^2+bx+c$.

Es könnte aber auch sein, dass eine quadratische Gleichung ohne eine einfache Zahl vorkommt, also: $0=ax^2+bx$. Wenn dies der Fall sein sollte, dann könntest du die Gleichung lösen indem du das x einfach ausklammerst.

Beispiel (Ausklammern)

$$0=2x^2-4x$$
$$0=x(2x-4)$$

Dadurch, dass wir das x ausklammern, erhalten wir ein Produkt – siehst du das? Die erste Gleichung $0=2x^2-4x$ war noch eine Subtraktion, aber jetzt steht da ein Produkt $0=x(2x-4)$. Das Minus ist zwar noch vorhanden, aber nur noch in der Klammer – das zählt nicht. Da wir jetzt also ein Produkt haben, gilt

> Wenn ein Faktor (= Teil eines Produktes) Null ist, dann ist das Produkt auch Null.

Zeigen wir das mal an dem *Beispiel*:

$$0= \underset{1.\,\text{Faktor}}{x} \cdot \underset{2.\,\text{Faktor}}{(2x-4)}$$

Wenn jetzt der erste Faktor – also das x – Null ist, dann kommt immer Null raus! Und somit hätten wir auch schon die erste Lösung - nämlich $x_1=0$.

Das könnten wir schnell prüfen:

$$0=0\cdot(2\cdot 0-4)$$
$$0=0\cdot(-4)$$
$0=0$ → also passt´s!

Und jetzt könnten wir noch ausrechnen, bei welchem x der zweite Faktor Null wird. Dafür setzen wir ihn gleich Null:

$$0=2x-4 \quad |+4$$
$$4=2x \quad |\div 2$$
$$x_2=2$$

Auch das könnte man schnell testen:

$$0=2\cdot(2\cdot 2-4)$$
$$0=2\cdot 0$$
$0=0$ → passt also auch!

Dieses Beispiel könnte auch einfach mit der Mitternachts- bzw. PQ – Formel ausgerechnet werden können. Dafür müsste für c bzw. q eine Null einsetzt werden, aber in der Regel ist man mit dem Ausklammern viel schneller!

Jetzt weißt du, dass du bei $0=ax^2+bx+c$ immer eine Formel anwenden musst und bei $0=ax^2+bx$ eine Formel anwenden könntest, besser wäre es aber, das x auszuklammern.

Du kannst dir aber sicher auch vorstellen, dass es eine weitere Art von quadratischen Gleichungen gibt, nämlich $0=ax^2+c$. Das heißt, dass da kein einfaches x mehr in der Gleichung steht, sondern nur ein Summand mit x^2 und einer komplett ohne x. Auch diese Art von quadratischen Gleichungen könntest du nach wie vor mit einer Formel berechnen – du könntest es aber auch etwas geschickter machen:

Beispiel (Wurzel ziehen):

$$
\begin{aligned}
0&=2x^2-8 && |+8\\
8&=2x^2 && |\div 2\\
4&=x^2 && |\pm\sqrt{}\\
x_{1/2}&=\pm 2
\end{aligned}
$$

Das heißt, wenn eine quadratische Gleichung in der Form $0=ax^2+c$ gegeben ist, könntest du nach x^2 auflösen und anschließend die Wurzel ziehen. Dabei solltest du nur beachten, dass du immer „plusminus“ die Wurzel ziehst: $\pm\sqrt{}$.

Denke immer daran, dass es beim Ziehen einer Wurzel zwei Lösungen gibt – eine positive und eine negative!

Zusammenfassung (lineare und quadratische Gleichungen)

Bis jetzt kannst du lineare und quadratische Gleichungen lösen. Bei den linearen müsste man einfach nur nach x auflösen, bei den quadratischen könnte es – je nach Zusammenstellung – mehrere Möglichkeiten geben. Zuerst sollte aber alles auf eine Seite geschmissen werden, sodass da $0=$... steht.

Hier eine Übersicht, wann du welchen Lösungsansatz verwenden kannst:

$0=ax^2+bx+c$	$0=ax^2+bx$	$0=ax^2+c$
Formel nutzen	Formel nutzen oder ausklammern	Formel nutzen oder Wurzel ziehen

Ansonsten musst du dir noch zwei Dinge unbedingt merken:

1. Wenn bei einem Produkt ein Faktor Null ist, dann ist das ganze Produkt Null.
2. Wenn man die Wurzel zieht, ergibt das immer zwei Ergebnisse, ein positives (zeigt der Taschenrechner an) und ein negatives (zeigt der Taschenrechner nicht an – muss man selbst dran denken).

*** *** ***

Ja, und das war auch schon alles, das man genau berechnen kann: Nur lineare und quadratische Gleichungen. Gleichungen höheren Grades, also wenn ein x^3 oder höher dabei stehen würde, kann man nicht berechnen – komisch, oder?

Also, berechnen irgendwie schon, aber nicht direkt. **Man könnte solche Gleichungen berechnen, indem man mit geschickten Tricks aus diesen Gleichungen eine Gleichung zweiten oder ersten Grades macht.** Das wird zum Beispiel bei der

Substitution

so gemacht. Das Wort Substitution kommt aus dem Lateinischen substituere und bedeutet „ersetzen“. Genau das machen wir bei der Substitution auch.

$$0=x^4-2x^2-3$$

Auf den ersten Blick könnte auffallen, dass diese Gleichung einer quadratischen Gleichung total ähnelt. Mathematisch könnten wir sogar so tun, als wäre das eine quadratische Gleichung, indem wir einfach x^2 mit z ersetzen.

$$0=x^4-2x^2-3 \qquad | \; x^2=z$$

$$0=z^2-2z-3$$

So, und jetzt haben wir eine quadratische Gleichung, die wir mittlerweile ganz easy berechnen könnten, oder?? ☺

Mit der Mitternachtsformel **Mit der PQ- Formel**

$$0=z^2-2z-3$$

Mit der Mitternachtsformel

$$a=1;b=-2;c=-3$$

$$z_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$z_{1/2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}$$

$$z_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$$

$$z_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}$$

Mit der PQ- Formel

$$p=-2;q=-3$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$z_{1/2}=-\frac{(-2)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{(-2)}{2}\right)^2-(-3)}$$

$$z_{1/2}=1\pm\sqrt{(-1)^2+3}$$

$$z_{1/2}=1\pm\sqrt{1+3}$$

$z_1=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$

$z_2=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

$z_1=1+\sqrt{4}=1+2=3$

$z_2=1-\sqrt{4}=1-2=-1$

So, jetzt haben wir das ausgerechnet und wissen, dass $z_1=3$ und $z_2=-1$ ist. Doch was hat das eigentlich mit unserer Ausgangsgleichung $0=x^4-2x^2-3$ zu tun? Diese Gleichung wollten wir ja eigentlich lösen. Haben dann für x^2 jeweils ein z eingesetzt und dann die Gleichung gelöst. Das heißt, wir wollten eigentlich mal x berechnen, haben jetzt aber erst mal z berechnet. Um daraus jetzt x zu bekommen, müssten wir resubstituieren, also „rückersetzen“. Dafür setzen wir für z wieder x^2 ein.

$z_1=3 \quad | \, z=x^2$

$x^2=3 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x_1=+\sqrt{3}$

$x_2=-\sqrt{3}$ man könnte auch $x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$ schreiben

...und das selbe machen wir noch mit z_2

$z_2=-1 \quad | \, z=x^2$

$x^2=-1 \quad | \pm\sqrt{\ }$

ERROR → aus einer negativen Zahl kann man keine Wurzel ziehen.

Somit hat die Gleichung also nur zwei Lösungen $x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$. Wenn z_2 aber positiv wäre, hätte sie insgesamt vier Lösungen. Man könnte also vier verschieden Zahlen für x einsetzen, sodass die Gleichung aufgehen würde.

Zusammenfassung (Substitution)

1. Alles auf eine Seite schmeißen, sodass $0=...$
2. substituiere x^2 mit z

3. Gleichung lösen
4. resubsituiere z mit x^2

*** *** ***

Das war der erste Trick, um aus einer Gleichung höheren Grades – in diesem Fall Grad 4 – eine Gleichung zweiten Grades zu machen. Der zweite Trick ist bekannt und nennt sich

Ausklammern.

Naja, ausklammern kannst du bestimmt schon irgendwie so ein bisschen. Aber das solltest du wirklich richtig gut können und vor allem auch sofort erkennen, ob man ausklammern kann. Das musst du drauf haben!

$0=2x^5-5x^4$

$0=x^4(2x-5) \quad \rightarrow \quad x_{1/2/3/4}=0$ weil x^4 ausgeklammert wurde

$0=2x-5 \quad |+5$

$5=2x \quad |\div 2$

$x_5=2{,}5$

Da gibt's noch einige Aufgaben im Übungsbuch auf Seite 12. Die solltest du auf jeden Fall machen, auch wenn du meinst, dass du das schon kannst.

*** *** ***

Sonst gibt es noch eine letzte Kleinigkeit, die man im Kopf haben sollte, um Gleichungen höheren Grades lösen zu können: Wenn die Gleichung nur aus zwei Teilen bestehen sollte, nachdem alles auf eine Seite