Milo Beckman

MATHE OHNE ZAHLEN

Was Lehrer für sich behalten – so erklärt, dass es jeder versteht

riva

Topologie

Form

Mannigfaltigkeiten

Dimensionen

Form

Mathematiker denken gerne zu viel über die Dinge nach. Das ist quasi unser Job. Wir nehmen irgendein Konzept, das in seinen Grundlagen von jedem verstanden wird – zum Beispiel Symmetrie oder Gleichheit –, und dann zerpflücken wir es, auf der Suche nach einer tieferen Bedeutungsebene.

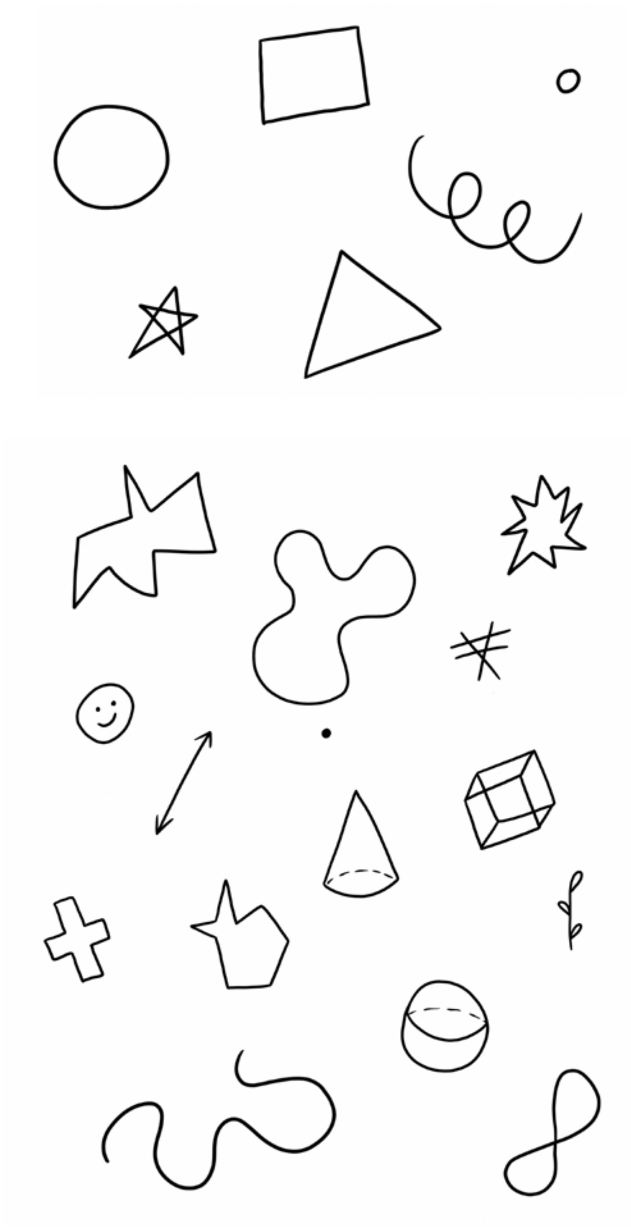
Nehmen wir mal die Form von etwas. Wir alle wissen mehr oder weniger, was eine Form ist. Wir schauen uns ein Objekt an und können problemlos erkennen, ob es ein Kreis, ein Rechteck oder etwas anderes ist. Ein Mathematiker würde jedoch fragen: Was ist Form? Warum hat etwas die ihm eigene Form? Wer ein Objekt anhand seiner Form identifiziert, der ignoriert dessen Größe, Farbe, Zweckbestimmung, Alter und Gewicht; er ignoriert, wer es hierhergebracht hat und wer dafür verantwortlich ist, es wieder an den ihm bestimmten Ort zu bringen, wenn alle nach Hause gehen. Was ignoriert er nicht? Was vermitteln wir anderen, wenn wir sagen, dass etwas wie ein Kreis geformt ist?

Natürlich sind diese Fragen ohne Zweck. Für jeden praktischen Bedarf ist unser intuitives Verständnis von Form ausreichend. Wir werden zeit unseres Lebens keine wichtige Entscheidung treffen müssen, die davon abhängig ist, wie genau wir das Wort »Form« definieren. Es ist einfach nur eine Sache, über die nachzudenken sich lohnt, wenn wir Zeit und Lust haben.

Gehen wir mal davon aus, dass dem so ist. Hier hätten wir eine Frage, die man sich womöglich stellen könnte:

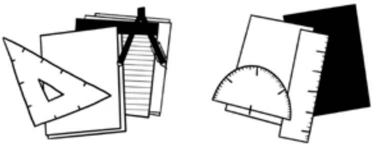
Eine simple Frage, möchte man meinen, die jedoch nicht leicht zu beantworten ist. Eine präzisere und enger umrissene Version dieser Frage – die sogenannte Poincaré-Vermutung – kursiert schon seit weit mehr als einem Jahrhundert, und noch immer kennen wir niemanden, der in der Lage war, sie zu beweisen. Viele haben es versucht, und ein Mathematiker hat vor nicht allzu langer Zeit ein Preisgeld von einer Million Dollar abgeräumt, weil es ihm gelungen ist, einen wesentlichen Teil des Problems zu lösen. Aber noch immer sind viele Formkategorien ungezählt, weshalb wir, als globale Gemeinschaft, noch immer nicht wissen, wie viele Formen es gibt.

Versuchen wir, die Frage zu beantworten. Wie viele Formen gibt es? In Ermangelung einer besseren Idee scheint es hilfreich, einfach mit dem Zeichnen verschiedener Formen anzufangen, um zu sehen, wo uns das hinführt.



Sieht so aus, als hinge die Antwort auf unsere Frage davon ab, wie genau wir Dinge in unterschiedliche Formkategorien einteilen. Ist ein großer Kreis dieselbe Form wie ein kleiner Kreis? Fassen wir »Schnörkel« unter einer großen Kategorie zusammen, oder sollten wir sie besser je nach Art ihrer Schnörkelung unterscheiden? Wir brauchen allgemeingültige Regeln, um in solchen Debatten zu einer Übereinkunft zu gelangen, damit die Frage »Wie viele Formen gibt es?« nicht fallabhängigen Ermessensentscheidungen unterliegt.

Hier stehen uns mehrere Regeln zur Auswahl, die allesamt gut geeignet wären, zu entscheiden, ob zwei Formen gleich sind oder jeweils in eine eigene Kategorie fallen. Wer Schreiner oder Ingenieur ist, der wird eine sehr strenge und präzise Regelung fordern, die zwei Formen nur dann gleich nennt, wenn alle ihre Kantenlängen, Winkel und Kurven einander exakt entsprechen. Diese Regel führt uns zu einem Teilgebiet der Mathematik, das sich Geometrie nennt, in dem Formen statisch und exakt sind und in dem man sich zum Beispiel mit dem Zeichnen lotrechter Linien und der Berechnung von Flächen befasst.

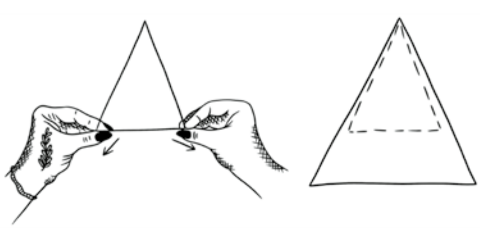


Wir wollen eine etwas losere Definition. Wir sind auf der Suche nach jeder erdenklichen Form, und wir haben nicht die Zeit, uns mit Abertausenden unterschiedlichen Schnörkelvarianten aufzuhalten. Wir wollen eine Regel finden, die großzügig definiert, wann wir zwei Dinge als derselben Formkategorie zugehörig begreifen sollen – eine Regel, die die Welt der Formen in eine überschaubare Anzahl breit gefasster Kategorien zerlegt.

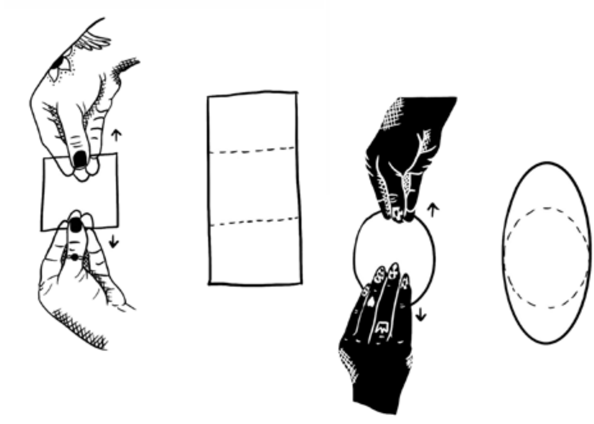
Neue Regel

Zwei Formen sind topologisch gleich, wenn sie sich durch Dehnen und Stauchen in die jeweils andere Form bringen lassen, ohne dass wir etwas zerreißen, zerschneiden oder kleben müssen.

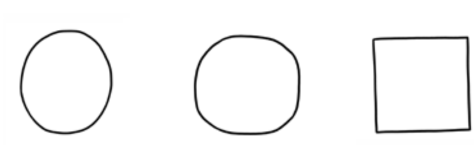
Diese Regel stellt den Kerngedanken der Topologie dar, die eine freiere, »abgedrehtere« Version der Geometrie ist. In der Topologie bestehen Formen aus einem dünnen, endlos dehnbaren Material, das wir drehen und lang ziehen und bearbeiten können wie Teig oder einen Kaugummi. In der Topologie ist die Größe einer Form nicht von Belang.



Außerdem ist ein Quadrat das Gleiche wie ein Rechteck, und ein Kreis ist das Gleiche wie ein Oval.



Und nun wird es verrückt: Nehmen wir diese »Dehnen und Stauchen«-Regel als Grundlage unserer Betrachtung, dann gilt, dass ein Kreis und ein Quadrat die gleiche Form haben!

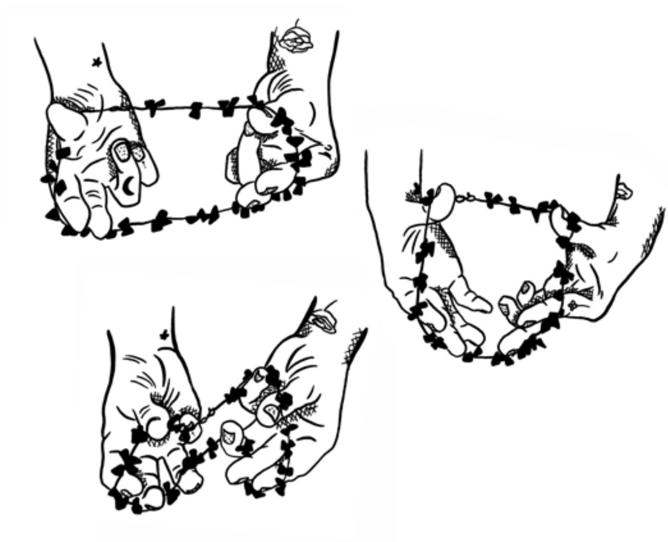


Bevor Sie nun loslaufen und Ihren Liebsten erzählen, dass Sie gerade ein Buch über Mathe lesen und gelernt haben, dass ein Quadrat ein Kreis ist, beachten Sie bitte: Der Kontext ist entscheidend. Ein Quadrat ist ein Kreis – in der *Topologie*. In der Kunst oder der Architektur ist ein Quadrat ganz sicher *kein* Kreis, genauso wenig wie in Alltagsgesprächen. Und auch nicht in der Geometrie. Und wer versucht, ein Fahrrad mit quadratischen Reifen zu fahren, der wird nicht sonderlich weit kommen.

Jetzt aber befassen wir uns mit der Topologie, und während wir das tun, scheren wir uns nicht um belanglose kleine Details wie spitze Ecken, die sich wegmassieren lassen. Wir richten unseren

Blick nicht auf oberflächliche Unterscheidungsmerkmale wie Seitenlängen und Winkel; uns kümmert nicht, ob Ecken gerade, gerundet oder geschnörkelt sind. Wir konzentrieren uns nur auf das Wesentliche, auf die eigentliche Form; wir konzentrieren uns auf die grundlegenden Merkmale, die eine Form zu der Form machen, die sie ist. Wenn Topologen ein Quadrat oder einen Kreis betrachten, sehen sie lediglich eine Schlinge, ein geschlossenes Band. Alles andere sind nur Eigenschaften, die sich aus der Art und Weise ergeben, wie man das Band im jeweiligen Moment zieht und drückt.

Das ist, als würden wir fragen: »Welche Form hat eine Halskette?« Hält man sie auf eine Weise, ist sie ein Viereck, hält man sie auf eine andere Weise, ist sie ein Kreis. Aber ganz gleich, wie man sie auch dreht und wendet: Ihr liegt eine immanente *Form* zugrunde, etwas Grundlegendes, das sich nicht verändert, egal, ob sie nun ein Viereck, einen Kreis, ein Oktagon, ein Herz, einen Halbmond, einen Klecks oder ein »Heptahektahexadekagon« darstellt.



Da diese Form sich in vielen verschiedenen unterschiedlichen Arten offenbaren kann, ist es nicht so ganz korrekt, sie entweder als Kreis oder als Viereck zu bezeichnen. Manchmal nennen wir sie dennoch einen Kreis, aber in der Topologie ist die offizielle Bezeichnung für eine solche Form »S-eins«. S-eins ist die Form einer Halskette, eines Armbands oder eines Gummibands, einer Rennstrecke oder einer Kreisbahn, eines Burggrabens oder einer Landesgrenze (Alaska gilt nicht!); S-eins ist die Form des Buchstabens O und des großen D, jeder geschlossenen Schleife in jedweder Form. So wie das Quadrat eine besondere Form des Rechtecks ist und der Kreis eine besondere Form des Ovals, so sind all diese Formen besondere Formen von S-eins.

Gibt es noch irgendwelche anderen Formen? Es wäre ein Jammer, wenn die Dehnen-und-Stauchen-Regel sich als so grob erweisen würde, dass wir unwillentlich die ganze Formendiversität in nur eine breite Kategorie heruntergebrochen haben. Die gute Nachricht: Haben wir nicht. Es gibt immer noch Formen, die nicht dasselbe sind wie ein Kreis.

Eine Linie, beispielsweise:

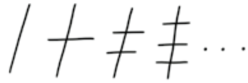
Eine Linie kann beinahe zu einem Kreis gebogen werden, aber um die Sache abzuschließen, müssten wir die beiden Endpunkte zusammenfügen – was nicht erlaubt ist. Ganz egal, wie Sie eine Linie bearbeiten, Sie werden immer diese beiden speziellen Endpunkte haben, an denen die Form einfach aufhört. Und Endpunkte kann man nicht loswerden. Man kann sie verschieben und auseinanderziehen, aber diese beiden Endpunkte sind ein unveränderliches Merkmal der Form.

Aus einem ähnlichen Grund stellt auch das Zahlzeichen der Acht eine andere Form dar. Es gibt keine Endpunkte, aber immer noch einen besonderen Punkt in der Mitte, an dem sich die Linien kreuzen, von dem aus vier Arme nach außen ragen, statt nur zwei – wie an jedem anderen Punkt der Form. Dehnen und stauchen Sie, so viel Sie wollen, doch auch so einen Schnittpunkt wird man nicht los.

Denkt man darüber nach, so ist das ausreichend Information, um die Frage »Wie viele Formen gibt es?« zu beantworten. Die Antwort lautet: unendlich viele, also Unendlichkeit. Hier, ich zeige Ihnen den Beweis:

Beweis

Sehen Sie sich diese Formenfamilie an. Sie schaffen jede neue Form, indem Sie der vorangegangenen Form einen Querstrich hinzufügen.



Jede neue Form hat mehr Schnittpunkte und Endpunkte als alle vorangegangenen. Also muss jede von ihnen wirklich eine andere, eine neue Form darstellen. Wenn man das ewig so weitermacht, erhält man eine unendlich große Familie unterschiedlicher Formen, und somit gibt es auch unendlich viele Formen.

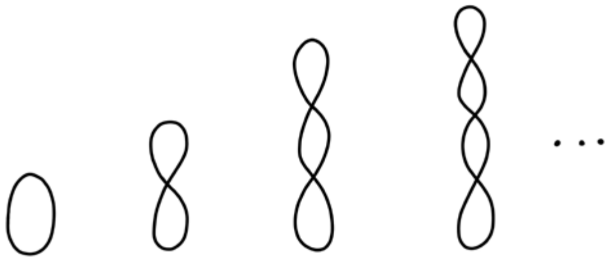
QED **

** QED = q. e. d. = quod erat demonstrandum = *was zu beweisen war* – seit dem 16. Jahrhundert eine übliche Schlussformel von Mathematikern am Ende einer Beweisführung.

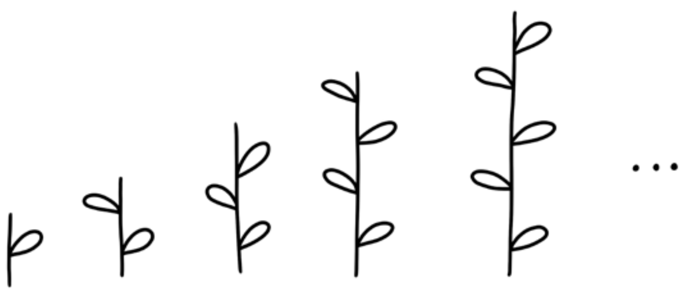
Überzeugt? Man braucht nur eine beliebige, endlose Familie unterschiedlicher Formen wie dieser zu finden, bei der offensichtlich ist, auf welche Weise sich immer weiter andere neue Formen erschaffen lassen.

Dieses Beispiel hier wäre genauso geeignet gewesen:

Oder dieses hier:



Und auch dieses hier funktioniert:



Das alles sind letztendlich nur unterschiedliche Arten ein und derselben Beweisführung: Sie möchten aufzeigen, dass es von etwas unendlich viel gibt, also beschreiben Sie einen systematischen Prozess, der von diesem Etwas fortlaufend neue, unterscheidbare Beispiele hervorbringt. Diese Beweisführung nennt man »unendliche Familie«, und sie ist in der Mathematik ein gängiges Mittel, wenn man zeigen will, dass es unendlich viel von etwas gibt. Ich halte sie für überzeugend – ich wüsste nicht wirklich, wie man dagegenhalten könnte. Wenn man von etwas ohne Ende mehr machen kann, dann muss dieses Etwas unendlich sein.

Und es geht nicht nur mir so: Die gesamte mathematische Gemeinschaft betrachtet Beweisführungen im Sinne der »unendlichen Familie« als validen mathematischen Beweis. Es gibt eine Reihe solcher Beweistechniken, bei denen dieselbe Art von Beweisführung in unterschiedlichen Kontexten verwendet werden kann, um verschiedene Dinge zu beweisen. Menschen, die sich viel mit Mathematik befassen, stellen fest, dass dieselben Beweismuster immer wieder auftauchen. Wir alle sind uns (größtenteils) darüber einig, welche Formen der Beweisführung legitim sind.

Wenn Sie diesen Beweis akzeptieren, dann haben wir jetzt die ursprüngliche Frage danach beantwortet, wie viele Formen es gibt. Die Antwort ist: unendlich viele. Es ist keine besonders interessante Antwort, aber es ist die Antwort, die wir erhalten. Sobald die Frage gestellt ist und die Verfahrensregeln festgelegt sind, steht die Antwort bereits fest. Wir müssen sie nur noch finden.

Die erste Frage, die zu stellen einem einfällt, führt nicht immer zu der interessantesten oder aufschlussreichsten Antwort. Wenn das passiert, können Sie entweder aufgeben und sich etwas suchen, um darüber nachzugrübeln, oder Sie können eine bessere Frage stellen.

Mannig-faltigkeiten

Es gibt zu viele Formen, als dass man einen Überblick darüber behalten könnte, weshalb Topologen sich nur auf die wichtigsten konzentrieren: *Mannigfaltigkeiten*. Klingt nach einer komplizierten Sache, aber das ist es wirklich nicht – ja Sie leben sogar auf einer Mannigfaltigkeit. Kreise, Linien, Flächen und Sphären (wobei man in der Mathematik unter einer Sphäre die Oberfläche einer Kugel sowie ihre topologisch möglichen Ableitungen versteht): Mannigfaltigkeiten sind die glatten, einfachen, einheitlichen Formen, die immer dann eine Hauptrolle zu spielen scheinen, wenn wir in Mathematik und Wissenschaft mit physikalischen Räumen arbeiten.

Sie sind von so simpler Art, dass man meinen könnte, wir hätten inzwischen alle von ihnen entdeckt. Haben wir aber nicht. Den Topologen ist das so peinlich, dass sie ein Kopfgeld in Höhe von einer

Million Dollar ausgelobt haben, um die Leute zu ermutigen, genauer nachzusehen. Und da ist sie, die größte ungelöste Frage der Topologie, die Experten auf diesem Gebiet seit über einem Jahrhundert beschäftigt und frustriert:

Oder ein wenig präziser:

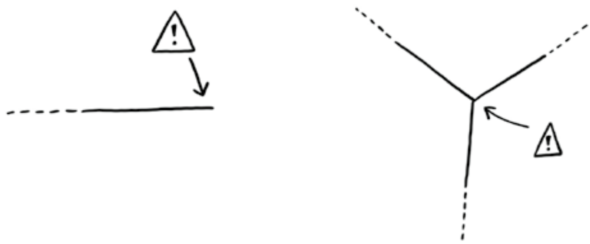
Das Ziel ist nicht, sie buchstäblich durchzuzählen, sondern sie alle zu entdecken, zu benennen und in verschiedene Arten zu klassifizieren. Wir erstellen eine Art Feldführer aller möglichen Mannigfaltigkeiten.

Was genau ist aber eine Mannigfaltigkeit? Um sich als Mannigfaltigkeit zu qualifizieren, gilt es, relativ strengen Regeln zu entsprechen, was auf die meisten Formen nicht zutrifft.

Neue Regel

Eine Form wird »Mannigfaltigkeit« genannt, wenn sie keine besonderen Punkte hat: keine Endpunkte, keine

Schnittpunkte, keine Kantenpunkte, keine Verzweigungspunkte. Sie muss überall gleich sein.



Das schließt sofort all die unendlichen Formfamilien des letzten Kapitels aus. Alles, was Punktmarkierungen, Asteriske oder dergleichen hat, zählt nicht als Mannigfaltigkeit. Das bedeutet, dass es für die »Wie viele«-Frage tatsächlich schon eine Antwort geben könnte: Möglicherweise gibt es eine exakte, begrenzte Anzahl von Mannigfaltigkeiten. Aber das wird sich noch zeigen müssen.

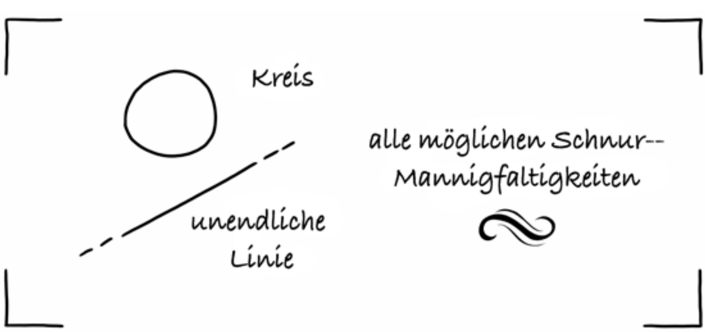
Diese Definition beschränkt sich zudem nicht auf flache Formen nach Art eines Drahtmodells, wie diejenigen, mit denen wir uns befasst haben. Mannigfaltigkeiten können auch aus folien- oder teigartigen Materialien bestehen. Das Universum, in dem wir leben, ist wahrscheinlich eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit; zumindest müsste man ansonsten annehmen, dass es eine physikalische Grenze gibt, an der es einfach endet, oder dass es sich irgendwie selbst überschneidet.

Aber bleiben wir erst einmal bei den Drahtmodellformen, also denen, die sich mit Schnur oder Büroklammern darstellen lassen. In der Topologie bezeichnen wir diese Formen als eindimensional, auch wenn die Seite, auf der sie abgebildet sind, zweidimensional ist. Es kommt nur auf das Material der Form an.

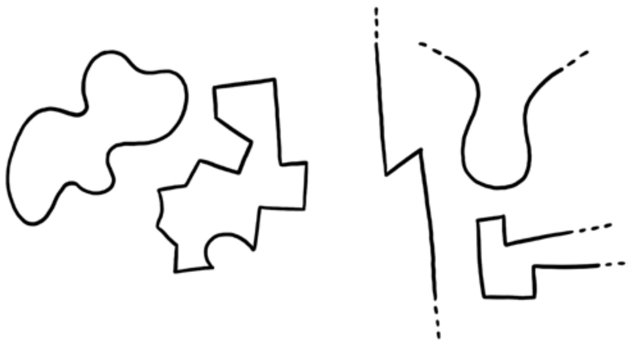
Welche Mannigfaltigkeiten kann man also mit einer Schnur darstellen? Da gibt es nicht so viele Möglichkeiten. Die meisten solchen Formen, die man sich ausdenken kann, haben besondere Punkte.

Die Wendungen und Kringel und Ecken stellen kein Problem dar, da diese sich glätten lassen. Das wahre Problem sind die Endpunkte. Wie lassen sich Endpunkte eliminieren?

Es gibt nur zwei Mannigfaltigkeiten mit Schnur oder Ähnlichem. Wenn Sie nicht wissen, welche das sind, dann können Sie sich jetzt einen kurzen Moment Zeit nehmen, um ins Leere zu starren und darüber nachzudenken, bevor Sie weiterblättern.



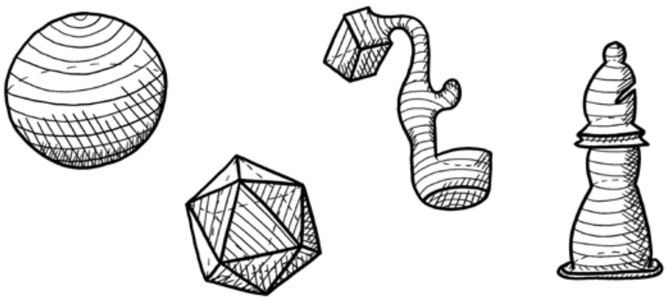
Der Kreis (auch S-eins genannt) und die unendliche Linie (R-eins genannt) sind die einzigen Mannigfaltigkeiten in der ersten Dimension. Um Endpunkte zu vermeiden, muss man entweder eine Drehung zurück zum Ausgangspunkt machen oder ewig weitergehen. Und vergessen Sie nicht: In der Topologie sind alle Formen dehnbar, was also auch für jede geschlossene Schleifenform und jede ewig weitergehende Form gilt. Das muss nicht unbedingt ein Kreis oder eine gerade Linie sein.



Und das war's mit der ersten Dimension. Nicht schlecht! Wie Sie sehen, haben wir unsere Suche stark eingegrenzt. Die ursprüngliche Frage danach, wie viele Formen es gibt, war zu groß und zu weit gefasst, aber die Frage nach den Mannigfaltigkeiten scheint überschaubar zu sein, zumindest bis jetzt. Sind Sie bereit für die nächste Dimension?

In der zweiten Dimension suchen wir nach Formen, die aus folienartigem Material bestehen. Denken Sie daran: Auf das Material kommt es an! Die meisten dieser Formen würde man normalerweise als dreidimensional begreifen, aber sie bestehen aus zweidimensionalem Material, und das ist, worauf es ankommt.

Also: Welche Mannigfaltigkeiten lassen sich aus Folienmaterial bilden? Wir suchen nach etwas, das überall flächig ist, etwas ohne Ränder oder Risse, an denen die Fläche einfach endet. Erinnern Sie sich daran, dass ich sagte, Sie würden auf einer Mannigfaltigkeit leben? Die Oberfläche der Erde ist eine Sphäre und als solche eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.



Durch Dehnen und Stauchen umfasst der Begriff »Sphäre« jede geschlossene Oberfläche: Würfel, Kegel, Zylinder, die ganzen Klassiker. Aber nutzen Sie Ihre Terminologie mit Bedacht! In der Mathematik bezieht sich »Sphäre« nur auf die hohle Oberflächenform, während eine »Kugel« ausgefüllt ist. Eine Kugel ist dreidimensional (aus teigartigem Material), daher befassen wir uns erst mal nicht weiter damit.

Die allgemeine Sphärenform wird S-zwei genannt, was Sinn ergibt, weil sie wie eine vergrößerte Version des Kreises (S-eins) ist. Wir können die gleiche Strategie anwenden, um zu unserer nächsten Folien-Mannigfaltigkeit zu gelangen. Das um eine Dimension erhöhte Äquivalent einer unendlichen Linie: eine unendliche Ebene.