PORTFOLIO SELECTION

Die Grundlagen der optimalen Portfolio-Auswahl

Harry M. Markowitz

FinanzBuch Verlag

Teil II

Die Beziehung zwischen einzelnen Wertpapieren und Portfolios

KAPITEL 3
DURCHSCHNITTE UND ERWARTUNGSWERTE

ZUM UMGANG MIT MATHEMATIK IN DIESEM BUCH

Die Beziehungen zwischen Wertpapieren und Portfolios, die hier erläutert werden sollen, sind ihrer Natur nach mathematisch. Sie folgen aus den Definitionen der verwendeten Begriffe und den Grundregeln der Algebra. Ebenso wie beispielsweise die Sätze der Geometrie müssen sie präzise formuliert und formal korrekt abgeleitet werden.
Mit Ausnahme der Anhänge ist dieses Buch für Leser ohne mathematische Ausbildung gedacht. Es war die Absicht des Verfassers, Konzepte anschaulich zu erläutern, Beweise nicht allzu gedrängt darzustellen und das notwendige mathematische Rüstzeug schrittweise einzuführen. Die Kapitel bauen jeweils auf bereits erklärten Konzepten, Beziehungen und Methoden auf, so dass der Leser seine mathematischen Kenntnisse nach und nach erweitern kann.
Der Nicht-Mathematiker kann dennoch nicht davon ausgehen, dass er dieses Buch wie einen Roman überfliegen oder wie bei einer Zeitung darin hin- und herspringen kann. Das Thema wird Stück für Stück aufgebaut. Die Reise kann nur vollzogen werden, wenn ein Schritt nach dem anderen gegangen wird. Die folgenden vier Regeln sollen dem Leser behilflich sein:

(1) *Vermeiden Sie „effiziente" Lesemethoden.* Einige moderne Lesemethoden ermutigen den Leser dazu, Sätze mit einem Blick aufzunehmen, rasch voranzuschreiten, niemals einen Absatz zweimal zu lesen oder über ein Detail nachzudenken. Während solche Methoden für das rasche Lesen eines Romans ausgezeichnet sein mögen, taugen sie für das Verständnis unbekannten mathematischen Materials gar nicht. Schnelles Lesen wird zudem umso schwerer werden, wenn wir Schritt für Schritt eine komprimierte Nota-

tion einführen. Einige Symbole können Dutzende von Wörtern ersetzen. Wenn man solch hochkonzentrierte Nahrung rasch hinunterschlingt, führt dies nur zu Verstopfung.
(2) *Achten Sie besonders auf Definitionen.* Es ist unmöglich für den Leser, die Relevanz eines Satzes zu verstehen oder einem Beweis zu folgen, wenn er nicht die genaue Bedeutung der Begriffe kennt. Besonders wichtige Begriffe werden bei der ersten Erwähnung *kursiv* gesetzt.
(3) Achten Sie besonders auf Sätze. Ein Satz ist eine kompakte, formale Aussage über eine wichtige Beziehung zwischen Konzepten. Die meisten der folgenden Überlegungen beziehen sich direkt oder indirekt auf einen Satz; sie erklären Sätze, beweisen sie oder erläutern ihre Relevanz. Wenn die Sätze verstanden wurden, ist die Anwendung auf Probleme der Portfolioauswahl meist kein Problem mehr.
(4) *Nehmen Sie sich Zeit, um Beweise zu verstehen.* Ein Beweis zeigt, dass die Beziehungen, die ein Satz ausdrückt, aus den Definitionen der Begriffe und den Grundregeln der Algebra folgen. Ein auswendig gelernter Satz wird bald seine Bedeutung verlieren und aus dem Gedächtnis verschwinden. Sobald die Gründe für die Gültigkeit des Satzes erkannt und sein Beweis nachvollzogen wurden, sobald die Unvermeidbarkeit und logische Notwendigkeit der Beziehung verstanden sind, wird der Satz zu einem alten Freund, den man nicht einfach vergisst und bei einem Wiedersehen sofort erkennt.

DREI THEMEN ZUM PREIS VON EINEM

Wir werden uns mit drei verschiedenen Themen parallel beschäftigen:

Erstens werden wir die Beziehungen zwischen den historischen Rückflüssen untersuchen, vor allem zwischen Wertpapierrückflüssen und Portfoliorückflüssen;
zweitens werden wir Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeitserwartungen, insbesondere solche für Wertpapiere und ihre Implikationen für Portfolios, betrachten;
und drittens werden wir Beziehungen zwischen *Zufallsvariablen* betrachten.

Die Relevanz der ersten zwei Themen wurde im letzten Kapitel bereits beleuchtet. Die Natur und Relevanz des dritten Themas muss kurz erläutert werden.

Die Zufallsvariable im hier verwendeten Sinn ist eine Zahl, die durch einen Zufallsgenerator erzeugt wurde. Die Anzahl der Augen, die bei einem Würfelwurf erscheint, die Anzahl der Asse in einer Hand beim Kartenspiel und die Zahl, auf die beim Roulette die Kugel fällt, sind Zufallsvariablen.
Wie im letzten Kapitel erwähnt wurde und in Kapitel 12 dargestellt werden wird, gelten die Beziehungen zwischen objektiven Wahrscheinlichkeiten von Zufallsvariablen ebenso auch für konsistente Wahrscheinlichkeitserwartungen. Der Bequemlichkeit halber werden Definitionen und Beziehungen zunächst an Hand bestimmter Zufallsgeneratoren erläutert und erst später in der abstrakten Form von Wahrscheinlichkeitserwartungen. Die Anwendung auf Zufallsvariablen wird häufig verwendet werden, um die bei Wahrscheinlichkeitserwartungen geltenden Verhältnisse und ebenso um Reihen von historischen Ergebnissen zu erläutern.
Diese drei Themen – Beziehungen zwischen historischen Durchschnitten, Beziehungen auf Grundlage von Wahrscheinlichkeitserwartungen und die Beziehungen zwischen Zufallsvariablen – sind ihrem Wesen nach unterschiedlich, aber (in bestimmter Hinsicht) der Form nach gleich. Die historische Häufigkeit ist nicht dasselbe wie eine Erwartung für die Zukunft. Eine Wahrscheinlichkeitserwartung für die Zukunft ist nicht unbedingt, eine wahre, objektive Wahrscheinlichkeit. Trotzdem entsprechen gewisse arithmetische Beziehungen zwischen historischen Durchschnittswerten genau den entsprechenden Beziehungen zwischen Zufallsvariablen. Die letzteren wiederum entsprechen den Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeitserwartungen. Somit kann die Diskussion eines dieser drei Themen häufig auf alle drei angewandt werden.

HÄUFIGKEITSVERTEILUNGEN UND WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN

Eine Drehung am „Glücksrad“ aus Abbildung 1 bestimmt den nächsten Wert einer Zufallsvariablen. Die Zahlen auf der Umfassung des Rads kann man sich als Gewinn oder Verlust vorstellen, der sich beim Einsatz von einem Dollar ergibt. Wenn das Rad mit dem Zeiger auf 0,10 anhält, gewinnt der Spieler 10 Cent für jeden Dollar seines Einsatzes: Er hat einen zehnprozentigen Gewinn erzielt. Wenn das Rad mit dem Zeiger auf –0,05 anhält, verliert der Spieler 5 Cent pro eingesetztem Dollar: Er macht einen fünfprozentigen Verlust.

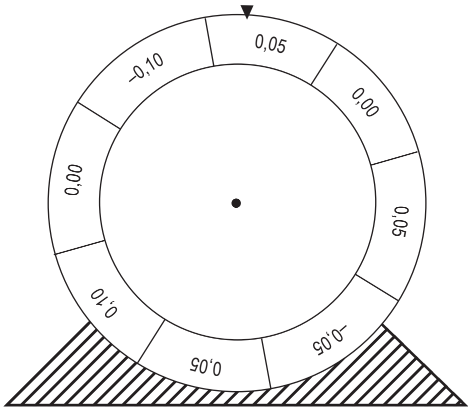


Abbildung 1: Glücksrad. Eine Drehung am Rad bestimmt den nächsten Wert einer Zufallsvariablen. 0,05 bedeutet einen Gewinn von 5 %; 0,10 bedeutet einen Verlust von 10 %.

Die relevanten Fakten über das Glücksrad lassen sich in tabellarischer oder graphischer Form zusammenfassen. Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse, die bei einer Drehung des Rads möglich sind,
die Anzahl, mit der jedes mögliche Ergebnis auf dem Rad erscheint,
die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis bei einer Drehung des Rads erscheint.
Wer nehmen an, dass jedes Feld des Rads mit derselben Wahrscheinlichkeit im Zeiger erscheint. Somit erscheint das Ergebnis 0,05, das in drei der acht Felder des Rads steht, in drei von acht Fällen und somit mit einer Wahrscheinlichkeit von 3/8 bei jeder Drehung des Rads.

Tabelle 1:
WAHRSCHEINLICHKEITEN VON ERGEBNISSEN

mögliche Ergebnisse	Anzahl des Erscheinens auf dem Rad	Wahrscheinlichkeit
-0,10	1	1/8
-0,05	1	1/8
0,00	2	1/4
0,05	3	3/8
0,10	1	1/8
Total	**8**	**1.00**

Diese Tabelle stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen auf dem Rad in Abbildung 1 dar.

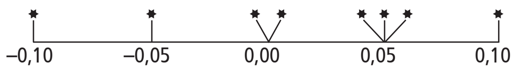
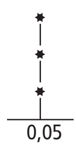


Abbildung 2: Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse. Jeder Stern repräsentiert ein Ergebnis auf dem Rad in Abbildung 1.

Die Abbildungen unterscheiden sich in der Behandlung der Ergebnisse, die mehr als einmal auf dem Rad erscheinen. Somit wird das Ergebnis 0,05 in Abbildung 2 so dargestellt:

In Abbildung 3 wird es dagegen so dargestellt:



Die Abbildungen 2 und 3 und die Tabelle 1 zeigen uns, wie sich die Wahrscheinlichkeiten zwischen verschiedenen Ergebnissen verteilen. Jede stellt die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* zwischen verschiedenen Zufallsvariablen dar.

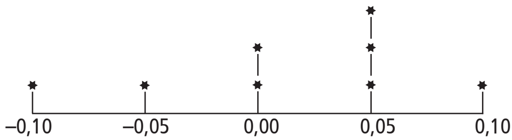


Abbildung 3: Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse. Dies ist eine andere Art, die Ergebnisse auf dem Rad in Abbildung 1 darzustellen. (Vgl. auch Abbildung 2).

Für unsere Zwecke enthält eine Wahrscheinlichkeitsverteilung alle zur Beurteilung einer Zufallsvariablen notwendigen Informationen. Die Größe und Farbe des Rads etwa sind nicht relevant, ebenso wenig wie die Verteilung der Ergebnisse auf dem Rad, solange es genau ausbalanciert und vollkommen ehrlich ist.

Tabelle 2
WAHRSCHEINLICHKEITSERWARTUNGEN

Rückfluss	Wahrscheinlichkeit
-0,30	1/30
-0,20	2/30
-0,10	4/30
0,00	6/30
0,10	8/30
0,20	5/30
0,30	2/30
0,40	1/30
0,50	1/30

Tabellarische Darstellung (hypothetischer) Wahrscheinlichkeitserwartungen.

Verschiedene Zufallsgeneratoren können dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung zeigen. Unsere Diskussion wird sich mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschäftigen, nicht mit den physikalischen Mechanismen, die Zufallsvariablen erzeugen.
Glücksräder wie in Abbildung 1 werden jedoch hilfreich sein, wenn wir uns abstrakte Beziehungen konkret veranschaulichen wollen. In diesem und in den folgenden Kapiteln werden wir Räder mit Zufallsvariablen sehen, Räder mit Paaren von Zufallsvariablen, Räder mit mehreren Zufallsvariablen, neue Räder, die auf bestimmte Art aus alten Rädern konstruiert wurden, und andere. Jedes wird eine abstrakte Idee illustrieren, die für die Analyse von Portfolios relevant ist.
Wahrscheinlichkeitserwartungen für zukünftige, unsichere Ereignisse können, ebenso wie bei Zufallsereignissen, in tabellarischer oder in graphischer Form dargestellt werden. Eine Person mag annehmen, dass die Rückflüsse (inklusive der Kapitalgewinne) eines Wertpapiers während des nächsten Jahrs irgendwo zwischen –30 und +50 % liegen können. Die Wahrscheinlichkeitserwartungen, die er/sie mit verschiedenen Ergebnissen assoziiert, können wie in Tabelle 2 aussehen. Entsprechend der Tabelle könnte die Person annehmen, dass in vier von 30 Fällen ein Verlust von 10 % auftritt, während in acht von 30 Fällen ein Gewinn von 10 % auftritt.

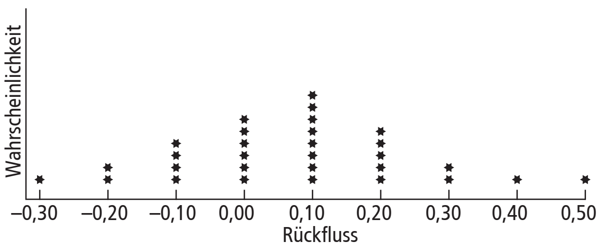


Abbildung 4: Eine Verteilung von Wahrscheinlichkeitserwartungen.
Graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeitserwartung in Abbildung 2.

Die Information aus Tabelle 2 wird in Abbildung 4 graphisch dargestellt. Abbildung 4 ist entsprechend Abbildung 3 gestaltet. Tabelle 2 könnte ebenfalls, wenn auch vielleicht weniger bequem, mit einer Abbildung entsprechend Abbildung 2 dargestellt werden.