JÜRGEN BRATER

MATHE MAGIC

Spannendes und Kurioses aus der Welt der Zahlen

YES

ZAHLEN, ZAHLEN, ZAHLEN …

In diesem Buch geht es um Zahlen und das, was man damit anfangen kann. Unter diesen Zahlen gibt es aber vielfältige Unterschiede, oder anders gesagt: Sie lassen sich mehreren Bereichen oder Mengen zuordnen. In erster Linie sind das:

- die natürlichen Zahlen
- die ganzen Zahlen
- die rationalen Zahlen
- die reellen Zahlen

Dabei gilt, dass jede der genannten Zahlenmengen Teil der nächstgrößeren beziehungsweise vollkommen in dieser enthalten ist. Betrachten wir die einzelnen Gruppen einmal näher.

Die *natürlichen Zahlen* sind diejenigen, die wir üblicherweise zum Zählen verwenden, also 1, 2, 3, 4, 5 und so weiter. Wobei, je nach Definition, auch die 0 (Null) dazugezählt wird. Dagegen gehören negative oder Kommazahlen sowie Brüche nicht dazu.

Nimmt man zu den natürlichen noch die negativen Zahlen, also –1 (minus 1), –2, –3, –4, –5 etc. dazu, hat man es mit *ganzen Zahlen* zu tun. Wie der Name schon sagt, beinhaltet diese Zahlenmenge keine Brüche oder Zahlen mit Nachkommastellen.

Die nächstgrößere Zahlenmenge ist diejenige der *rationalen Zahlen*. Sie umfasst auch noch die Brüche ganzer Zahlen. Diese lassen sich entweder in der Form Zähler/Nenner (z. B.: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{13}{58}$) oder als Nachkommazahlen (z. B.: 0,5; 1,33; 44,3885) darstellen, sofern diese in der Anzahl begrenzt sind (z. B.: 34, 575.789) oder sich periodisch wiederholen (z. B.: $\frac{1}{3}$ = 0,333333333333333 … oder $\frac{6}{11}$ = 0,5454545454 …)

Womit wir schließlich zu den *reellen Zahlen* kommen. Das sind sämtliche Zahlen, die man aus dem Mathematikunterricht in der Schule kennt. Neben den rationalen gehören dazu auch noch die *irrationalen Zahlen,* die dadurch gekennzeichnet sind, dass sie sich nicht als Bruch von ganzen Zahlen schreiben lassen. Sie enthalten unendlich viele Nachkommastellen, können also niemals vollkommen niedergeschrieben werden. Im Gegensatz zu den unendlichen rationalen Zahlen weisen die Nachkommastellen hier aber keine sich ständig wiederholenden Zahlenfolgen (Perioden) auf. Die berühmteste irrationale Zahl ist wohl die Kreiszahl Pi (π = 3,14159265358979323846264338327950288419 71…, siehe Seite 121).

Nach dieser kleinen Einführung folgt hier schon das erste von vielen kniffligen Rechenrätseln und Denksportaufgaben in diesem Buch. Man erkennt sie daran, dass sie jeweils in eine grau unterlegte Box eingebettet sind. Die Lösungen findest du ab Seite 137.

Kleiner als die Hälfte

Welche ganze Zahl ist um 2 kleiner als ihre Hälfte?

UNHEIMLICHE VERDOPPELUNG

Nimm eine beliebige dreistellige Zahl und multipliziere sie mit 7. Das Ergebnis multiplizierst du mit 11 und das Resultat noch einmal mit 13. Plötzlich steht die Zahl zweimal da.

Zwei Beispiele:

123
$123 \times 7 = 861$
$861 \times 11 = 9471$
$9471 \times 13 = 123.123$

238
$238 \times 7 = 1666$
$1666 \times 11 = 18.326$
$18.326 \times 13 = 238.238$

Zahlenwert gleich Buchstabenzahl

Im Deutschen gibt es nur eine einzige Zahl, deren Wert mit der Zahl der Buchstaben übereinstimmt. Welche ist das?

UNVORSTELLBAR GROSSE UND KLEINE ZAHLEN

Es gibt Zahlen, die sind so ungeheuer groß, dass man sie sich auch mit noch so viel Anstrengung und Fantasie beim besten Willen nicht vorstellen kann. Man denke etwa an die Anzahl der Sandkörner in der Sahara, der Ameisen in Europa oder der Moleküle im menschlichen Körper. Für derartige Riesenzahlen gibt es spezielle Bezeichnungen, doch die erleichtern die Vorstellung auch nicht wesentlich. Die wichtigsten sind in nachfolgender Tabelle aufgelistet, dazu die üblichen Abkürzungen, von denen viele die ersten vier von Computerspeichern her kennen. Daneben enthält die Tabelle noch die in der Mathematik übliche Schreibweise in Potenzen.

Zahl	**Bezeichnung**	**Abkürzung**	**Potenz**
1 mit 3 Nullen	Tausend	Kilo	10^3
1 mit 6 Nullen	Million	Mega	10^6
1 mit 9 Nullen	Milliarde	Giga	10^9
1 mit 12 Nullen	Billion	Tera	10^{12}
1 mit 15 Nullen	Billiarde	Peta	10^{15}
1 mit 18 Nullen	Trillion	Exa	10^{18}
1 mit 21 Nullen	Trilliarde	Zetta	10^{21}
1 mit 24 Nullen	Quadrillion	Yotta	10^{24}

Selbstverständlich gibt es noch weitaus größere Zahlenbezeichnungen, etwa *Septillion* für eine 1 mit 42 Nullen oder *Undezilliarde* für eine 1 mit 69 Nullen. Doch die verwendet kein Mensch, weil es bei derart gigantischen Zahlen erheblich praktischer ist, sie in Potenzen zu schreiben. Dabei gibt die Hochzahl der 10 die Anzahl der Nullen hinter der 1 an. Anstelle von 9.000.000 (9 Millionen) schreibt man also einfach 9×10^6. Der Vorteil dieser Darstellungsweise wird umso offensichtlicher, je größer die Zahl ist. 15 Quadrillionen etwa sind in Ziffern geschrieben eine 15 mit 24 Nullen, da schreibt sich doch 15×10^{24} wesentlich schneller. Außerdem vermeidet man so die erhebliche Gefahr, sich bei der Anzahl der Nullen zu verzählen.

Der entscheidende Vorteil der Potenzen ist jedoch, dass sich mit ihnen sehr einfach rechnen lässt: Beim Multiplizieren muss man nur die Grundzahlen malnehmen und die Hochzahlen addieren. So ist zum Beispiel 12 Milliarden mal 5 Septilliarden dasselbe wie $12 \times 10^9 \times 5 \times 10^{45}$, was – leicht auszurechnen – 60×10^{54} (60 Nonillionen) ergibt.

Übrigens gibt es derart große Zahlen noch gar nicht sehr lange. Bis Anfang des 13. Jahrhunderts war schon bei 100.000 Schluss. Mehr benötigte man schlichtweg nicht. 1270 tauchte dann in Italien zum ersten Mal die Million auf (da *mille* im Italienischen für 1000 steht und die Endung *-one* so viel bedeutet wie groß oder mächtig, ist eine Million, genau genommen, nichts weiter als eine große Tausend). Danach dauerte es mehr als 200 Jahre, bis der Mathematiker Nicolas Chuquet im Jahr 1484 vorschlug, für das Millionenfache einer bereits benannten Zahl jeweils einen neuen Begriff einzuführen. So entstanden die Billion für eine Million mal eine Million und die Trillion für eine Million mal eine Billion.

Aber natürlich gibt es neben den unvorstellbar großen auch unvorstellbar kleine Zahlen. Für diese existieren spezielle Wortvorsätze, von denen dir sicher *Nano* für *ein Milliardstel* geläufig ist. In der nachfolgenden Tabelle sind die bekanntesten derartigen Vorsätze sowie die zugehörigen Potenzen und Abkürzungen angegeben. Diese Abkürzungen setzt man vor die entsprechende Maßeinheit. Misst also etwa ein Virus ein Milliardstel Meter, so ist er 1 nm (1 Nanometer) groß.

Bezeichnung	Vorsatz	Potenz	Abkürzung
Hundertstel	Zenti	10^{-2}	c
Tausendstel	Milli	10^{-3}	m
Millionstel	Mikro	10^{-6}	µ
Milliardstel	Nano	10^{-9}	n
Billionstel	Piko	10^{-12}	p
Billiardstel	Femto	10^{-13}	f

Nur drei Ziffern

Welche ist die höchste Zahl, die man mit drei Ziffern ausdrücken kann?

IMMER WIEDER 37

Wähle eine dreistellige Zahl mit drei identischen Ziffern (z. B.: 444). Bilde daraus die Quersumme (4 + 4 + 4 = 12) und teile die Zahl dadurch (444 : 12). Du bekommst immer dasselbe Ergebnis: 37.

Im Schneckentempo

Eine Weinbergschnecke fällt in einen 10 Meter tiefen Brunnen. Sofort macht sie sich daran, wieder herauszukommen, und beginnt, die senkrechte Wand hinaufzuklettern. Dabei schafft sie tagsüber 3 Meter, rutscht aber in der Nacht, während sie schläft, jedes Mal 2 Meter zurück. Nach wie vielen Tagen ist sie oben?

MATHEMATIKER UND PHYSIKER

Eine Gruppe Mathematiker und eine Gruppe Physiker fahren mit dem Zug zu einer Tagung. Während jeder Physiker eine eigene Fahrkarte gekauft hat, besitzen die Mathematiker nur eine einzige Karte. Plötzlich ruft einer der Mathematiker: »Der Schaffner kommt!«, woraufhin sich alle Mathematiker in eine Zugtoilette zwängen. Der Schaffner kontrolliert zuerst die Physiker, sieht dann, dass das WC besetzt ist, und klopft an die Tür: »Die Fahrkarte bitte!« Einer der Mathematiker schiebt die Fahrkarte unter der Tür durch, und der Schaffner zieht zufrieden ab.

Auf der Rückfahrt beschließen die Physiker, denselben Trick anzuwenden, und kaufen für die ganze Gruppe nur eine einzige Karte. Verwundert registrieren sie, dass die Mathematiker diesmal überhaupt kein Ticket lösen. Während der Fahrt ruft wieder einer: »Der Schaffner kommt!« Sofort stürzen die Physiker in das eine WC, während sich die Mathematiker gemächlich auf den Weg zu einem anderen machen. Bevor sich der Letzte von ihnen auf den Weg macht, klopft er bei den Physikern an: »Die Fahrkarte bitte!«

Wie schnell im Durchschnitt?

Auf dem Weg von A-Dorf nach B-Dorf fährt Hans konstant 50 Stundenkilometer schnell. Zurück geht es wegen eines Defekts an seinem Motorroller nur mit 25 Stundenkilometern.

Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht er insgesamt?

DIE GEHEIMNISVOLLE 1089

Denk dir eine dreistellige Zahl, bei der sich die erste und letzte Ziffer um mindestens 2 unterscheiden. Kehre sie um, und subtrahiere die kleinere dieser Zahlen von der größeren. Danach vertauschst du die erste Ziffer der neuen dreistelligen Zahl mit der letzten und addierst die beiden.

Das Ergebnis ist – ganz egal, welche Zahl du dir gedacht hast – immer 1089.

Ein Beispiel:

782
782 – 287 = 495
594 + 495 = 1089

Der fleißige Bücherwurm

In einem Bücherregal steht ein zweibändiges Werk. Der erste Band umfasst 230 und der zweite 320 Seiten. Gerade ist ein Bücherwurm dabei, sich quer durch die beiden Bände hindurchzubohren. Dabei braucht er für jedes Blatt 1 Minute und für jeden Buchdeckel 1 Stunde.

Wie lange braucht der Wurm, um sich von Seite 1 des ersten Bandes bis zur letzten Seite des zweiten Bandes vorzuarbeiten?

PRIMZAHLEN

Kennzeichen aller Zahlen mit dem Vorsatz »prim« ist, dass sie nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Demzufolge ist 2 die kleinste Primzahl, danach folgen 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 und 23. Da alle anderen natürlichen Zahlen aus Primzahlen zusammengesetzt und damit Produkte von ihnen sind (z. B.: $39 = 3 \times 13$, $75 = 3 \times 5 \times 5$, $2785 = 5 \times 557$), haben Primzahlen in der Mathematik nahezu dieselbe Bedeutung wie die Elemente in der Chemie.

Schon 1850 hat der russische Mathematiker Tschebyschew bewiesen, dass es zwischen jeder Primzahl und ihrem Doppelten mindestens eine weitere Primzahl gibt. Wobei die Betonung auf »mindestens« liegt. Denn schon zwischen der 6 und der 12 finden sich mit der 7 und der 11 gleich zwei davon. Und noch viel früher, nämlich bereits im 4 Jahrhundert v. Chr., hat der berühmte griechische

Mathematiker Euklid in seinem Buch *Die Elemente* bewiesen, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist, dass sich also zu jeder beliebigen Primzahl, und sei sie noch so groß, immer eine noch größere finden lässt. Seither haben Scharen von Mathematikern Unmengen von Zeit investiert, Primzahlen mit möglichst vielen Stellen zu finden. Den aktuellen Rekord stellt die Zahl $2^{82589933} - 1$dar, ein Monster mit mehr als 24 Millionen Stellen. Zum Vergleich: Die gesammelten Werke von William Shakespeare umfassen Schätzungen zufolge lediglich 4 bis 5 Millionen Buchstaben! Wobei der Rekord zu dem Zeitpunkt, an dem du dieses Buch liest, durchaus schon wieder überboten sein kann.

Das größte Rätsel der Primzahlen aus mathematischer Sicht ist ihre scheinbar keiner Regel gehorchende Verteilung unter allen Zahlen. Daran, ein berechenbares Muster zu finden, haben sich Generationen von Mathematikern die Zähne ausgebissen, bislang ohne jeden Erfolg. Deshalb gibt es bis heute bei der Suche nach immer größeren Primzahlen keine andere Methode, als jeden potenziellen Kandidaten probeweise durch sämtliche möglichen Teiler zu dividieren, wobei es von denen naturgemäß umso mehr gibt, je größer die zu prüfende Zahl ist.

Manche Primzahlen weisen weitere überraschende Eigenschaften auf. Das gilt etwa für »Primzahlzwillinge«, also solche, zwischen denen nur eine einzige Zahl liegt. Wobei diese naturgemäß gerade sein muss, da ja sämtliche Primzahlen außer der 2 ungerade sind. Solche Zwillinge sind etwa 3 und 5, 5 und 7, 11 und 13 sowie 17 und 19. Ob es von ihnen unendlich viele gibt, ist bis heute nicht bekannt.

Ein weiteres bis heute nicht geklärtes Phänomen, die Primzahlen betreffend, ist die sogenannte »Goldbach-Vermutung« (benannt nach dem Mathematiker Christian von Goldbach, der sie bereits

1742 propagiert hat). Sie beruht auf der offensichtlichen Tatsache, dass die Summe zweier Primzahlen – die ja mit Ausnahme der 3 allesamt ungerade sind – stets gerade ist, und besagt, dass sämtliche geraden Zahlen größer 2 als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann (z. B.: 6 = 3 + 3, 144 = 71 + 73, 9654 = 2237 + 7417). Oder anders ausgedrückt: Von der Ziffer 3 an kann man jede gerade Zahl restlos in Primzahlen zerlegen. Die Richtigkeit dieser Vermutung wurde inzwischen für Zahlen bis über 100 Milliarden belegt, ohne dass damit jedoch der Beweis erbracht wurde, dass sie tatsächlich für *jede beliebig große* Zahl gilt. Sie ist und bleibt eben eine Vermutung.

Erstaunliche Primzahlreihe

Addiert man zur Primzahl 7 eine bestimmte zweistellige Zahl n, erhält man wieder eine Primzahl. Addiert man zu dieser noch einmal n, ist das Ergebnis wieder eine Primzahl. Macht man so weiter, erhält man (zusammen mit der 7) insgesamt sechs Primzahlen, die dann natürlich untereinander alle denselben Abstand n haben.

Wie lautet n?

(Kleine Hilfe: n ist zweistellig, und die erste Stelle ist auch eine Primzahl.)